

Teoría de conjuntos

ÁREA: MATEMÁTICAS

01 Presentación

Todo estudiante de la Licenciatura en Matemáticas debe manejar los conceptos de la Lógica Formal y la Teoría de Conjuntos para su aplicación en la Lógica Inferencial y para la estructuración de su pensamiento como futuro docente del área. La teoría de conjuntos es una rama de las matemáticas que estudia las propiedades de los conjuntos: colecciones abstractas de objetos, consideradas como objetos en sí mismas. Los conjuntos y sus operaciones más elementales son una herramienta básica en la formulación de cualquier teoría matemática. Sin embargo, la teoría de los conjuntos es lo suficientemente rica como para construir el resto de los objetos y estructuras de interés en matemáticas: números, funciones, figuras geométricas; y junto con la lógica permite estudiar los fundamentos de esta. En la actualidad se acepta que el conjunto de axiomas de la teoría de Zermelo - Fraenkel es suficiente para desarrollar toda la matemática. Además, la propia teoría de conjuntos es objeto de estudio per se, no sólo como herramienta auxiliar, en particular las propiedades y relaciones de los conjuntos infinitos. En esta disciplina es habitual que se presenten casos de propiedades indemostrables o contradictorias, como la hipótesis del continuo o la existencia de un cardinal inaccesible. Por esta razón, sus razonamientos y técnicas se apoyan en gran medida en la lógica matemática.

02 Competencias genéricas

4

- Abstraer, analizar y sintetizar.
- Identificar, plantear y resolver problemas.
- Trabajar en equipo y autónomamente.
- Comunicar las ideas de forma oral y escrita.

03 Competencias específicas

4

- Formular conjeturas, establecer relaciones, justificar procedimientos y construir argumentos matemáticos válidos.
- Identificar, modelar y resolver situaciones problemáticas mediante estrategias matemáticas adecuadas, evaluando la pertinencia de los resultados.
- Expresar, interpretar y argumentar ideas matemáticas utilizando lenguaje verbal, simbólico, gráfico y tabular de manera clara y precisa.
- Representar situaciones del mundo real mediante modelos matemáticos, analizarlos, interpretar los resultados y valorar sus alcances y limitaciones.

Insuficiente menos del 60%

El estudiante no alcanza los desempeños mínimos esperados. Esto se evidencia en que la mayoría de las soluciones que presenta no corresponden a las preguntas, problemas o ejercicios planteados o muestran un desarrollo incompleto, sus intervenciones se limitan a respuestas breves que no desarrollan las ideas solicitadas, presenta imprecisiones en la comunicación de ideas matemáticas, su participación en las actividades propuestas es limitada y no cumple con la mayoría de los compromisos académicos establecidos.

Básico 60% - 74%

El estudiante alcanza los desempeños esperados. Esto se evidencia en que las soluciones que presenta corresponden a las preguntas, problemas o ejercicios planteados y muestran un desarrollo completo, sus intervenciones responden a lo solicitado, comunica ideas matemáticas con claridad, cumple con las actividades propuestas y es responsable con sus compromisos académicos.

Alto 75% - 84%

El estudiante supera los desempeños esperados. Esto se evidencia en que las soluciones que presenta corresponden a las preguntas, problemas o ejercicios planteados y muestran un desarrollo completo, sus intervenciones amplían o enriquecen la discusión, comunica ideas matemáticas con precisión y fluidez, participa de manera activa y propositiva en las actividades del curso, y cumple sus compromisos académicos con autonomía.

Avanzado 85% - 100%

El estudiante supera ampliamente los desempeños esperados. Esto se evidencia en que las soluciones que presenta corresponden a las preguntas, problemas o ejercicios planteados, son completas y muestran enfoques originales, sus intervenciones proponen ideas o preguntas que amplían los temas trabajados, comunica ideas matemáticas con rigor, demuestra liderazgo y colaboración en las actividades del curso, y toma la iniciativa para ir más allá de los compromisos académicos establecidos.

Apropiación y manejo de conceptos

Insuficiente (<60%)

Responde de manera incorrecta a preguntas relacionadas con los conceptos del curso; emplea definiciones, propiedades o teoremas que no corresponden con la situación planteada; o no logra resolver ejercicios o problemas que requieren la aplicación de dichos conceptos.

Básico (60%-75%)

Enuncia y aplica correctamente definiciones, propiedades y teoremas en la solución de ejercicios y problemas rutinarios del curso, expresando los conceptos mediante lenguaje natural y matemático.

Alto (75%-84%)

Expresa definiciones, propiedades y teoremas utilizando lenguaje matemático formal; relaciona conceptos entre sí y justifica el uso de definiciones, propiedades o teoremas en la solución de ejercicios y problemas.

Avanzado (85%-100%)

Explica condiciones, implicaciones y relaciones entre los conceptos del curso y sus aplicaciones; establece conexiones con otros temas; argumenta procedimientos a partir de los conceptos; generaliza resultados o propone estrategias alternativas de solución sustentadas en dichos conceptos.

Procedimientos y uso de herramientas para la solución de problemas

Insuficiente (<60%)

Selecciona o aplica procedimientos que no corresponden con la situación planteada, o que no conducen a resultados que satisfacen las condiciones del problema.

Básico (60%-75%)

Aplica correctamente procedimientos, algoritmos y herramientas básicas para resolver ejercicios rutinarios del curso.

Alto (75%-84%)

Selecciona y utiliza procedimientos y herramientas según las características del problema, justificando su elección en las situaciones trabajadas en el curso.

Avanzado (85%-100%)

Combina diferentes procedimientos, representaciones o herramientas para resolver problemas; compara estrategias de solución y propone métodos alternativos o más eficientes.

Solución de problemas y aplicaciones

Insuficiente (<60%)

Aplica procedimientos o estrategias que no corresponden con la situación planteada o que no conducen a soluciones correctas; omite condiciones o relaciones necesarias para la solución; obtiene resultados incorrectos o inconsistentes; o no resuelve la mayoría de los problemas propuestos.

Básico (60%-75%)

Resuelve correctamente la mayoría de los problemas propuestos en el curso, utilizando procedimientos y estrategias que corresponden con las condiciones y objetivos de la situación planteada, y obteniendo resultados que satisfacen las condiciones del problema.

Alto (75%-84%)

Resuelve los problemas propuestos utilizando diferentes procedimientos o representaciones; justifica las estrategias empleadas; verifica resultados y establece relaciones con los conceptos, procedimientos y representaciones involucradas en la solución.

Avanzado (85%-100%)

Formula y resuelve problemas que van más allá de los ejercicios rutinarios utilizando diferentes estrategias de solución; compara procedimientos y resultados; analiza alcances o limitaciones de las soluciones obtenidas; establece conexiones con otros conceptos o temas; y formula nuevas situaciones o problemas que amplían los aprendizajes alcanzados.

Comunicación y argumentación

Insuficiente (<60%)

Comunica sus ideas principalmente en lenguaje natural, presentando vacíos, imprecisiones o afirmaciones contradictorias en la explicación de conceptos, procedimientos, representaciones o resultados; no justifica las soluciones de los problemas propuestos; o los argumentos que presenta no sustentan los procedimientos seguidos ni las conclusiones obtenidas.

Básico (60%-75%)

Comunica ideas matemáticas utilizando lenguaje natural y matemático; responde preguntas y explica conceptos, procedimientos, representaciones o resultados en ejercicios, problemas o exposiciones; y justifica las soluciones desarrolladas mediante argumentos que sustentan las conclusiones obtenidas.

Alto (75%-84%)

Comunica ideas matemáticas utilizando lenguaje matemático formal en la explicación de conceptos, procedimientos, representaciones y resultados; establece relaciones entre diferentes representaciones o conceptos; y construye argumentos que sustentan y permiten justificar soluciones, respuestas o conclusiones.

Avanzado (85%-100%)

Comunica y argumenta ideas matemáticas utilizando diferentes representaciones y formas de expresión; analiza, debate o refuta argumentos y soluciones; establece conexiones con otros conceptos o temas; y construye conjeturas, generalizaciones o explicaciones para sustentar, extender o reinterpretar resultados, procedimientos o relaciones matemáticas en otros contextos.

Análisis e interpretación de resultados

Insuficiente (<60%)

Interpreta resultados de manera desconectada de las condiciones o del contexto de la situación planteada, o no los interpreta; establece conclusiones que no corresponden con las representaciones, procedimientos o resultados obtenidos; o acepta soluciones sin verificar si satisfacen las condiciones, restricciones o supuestos del problema.

Básico (60%-75%)

Interpreta resultados obtenidos en ejercicios, problemas o situaciones trabajadas en el curso de acuerdo con las condiciones y el contexto planteado; establece conclusiones que corresponden con las representaciones, procedimientos y resultados desarrollados; y verifica si las soluciones obtenidas satisfacen las condiciones y restricciones de la situación planteada.

Alto (75%-84%)

Explica cómo cambian los resultados al modificar condiciones, representaciones o procedimientos; establece relaciones entre diferentes resultados o casos particulares; y sustenta conclusiones a partir de la verificación de que las soluciones obtenidas satisfacen las condiciones del problema y corresponden con los procedimientos desarrollados.

Avanzado (85%-100%)

Evalúa alcances, limitaciones o implicaciones de los resultados obtenidos; establece conexiones con otros conceptos o temas; formula conclusiones, conjeturas o nuevas preguntas a partir de los resultados; y utiliza el análisis de resultados para extender, generalizar o reinterpretar las situaciones trabajadas en el curso.

06 Actividades y tareas de evaluación

7

Las siguientes actividades y tareas permiten evaluar de manera integral los criterios establecidos en la rúbrica general para cursos de matemáticas y estadística. Las tareas propuestas buscan generar evidencias observables relacionadas con la apropiación conceptual, la resolución de problemas, la comunicación matemática, la argumentación y el análisis e interpretación de resultados.

Las actividades pueden desarrollarse de manera individual o grupal, en contextos presenciales o virtuales, y adaptarse a diferentes niveles y enfoques de formación matemática o estadística.

Talleres de resolución de problemas

PROPÓSITO DE EVALUACIÓN

Evaluar la aplicación de conceptos, procedimientos y estrategias en situaciones relacionadas con los contenidos del curso.

CRITERIOS QUE PERMITE EVALUAR

- Apropriación y manejo de conceptos
- Procedimientos y uso de herramientas
- Solución de problemas y aplicaciones
- Comunicación y argumentación
- Análisis e interpretación de resultados

¿EN QUÉ CONSISTE LA ACTIVIDAD?

Conjunto de ejercicios y problemas que el estudiante resuelve de manera individual o grupal. Incluye situaciones rutinarias y no rutinarias relacionadas con los contenidos del curso. El estudiante selecciona procedimientos, aplica conceptos, obtiene resultados y los interpreta en contexto.

EVIDENCIAS OBSERVABLES

- Uso de definiciones, propiedades y teoremas
- Selección de procedimientos
- Consistencia y coherencia de las soluciones
- Interpretación de los resultados en un contexto determinado
- Validación de las respuestas o soluciones obtenidas
- Comparación de estrategias de solución

Sustentaciones orales

PROPÓSITO DE EVALUACIÓN

Evaluar la capacidad del estudiante para explicar, justificar y argumentar ideas matemáticas relacionadas con problemas, conceptos o procedimientos trabajados en el curso.

CRITERIOS QUE PERMITE EVALUAR

- Comunicación y argumentación
- Apropiación y manejo de conceptos
- Procedimientos y uso de herramientas
- Análisis e interpretación de resultados

¿EN QUÉ CONSISTE LA ACTIVIDAD?

El estudiante expone oralmente la solución de uno o varios problemas ante el docente o el grupo. Explica los conceptos utilizados, describe los procedimientos seguidos, justifica sus decisiones y responde preguntas sobre su trabajo.

EVIDENCIAS OBSERVABLES

- Explicación de ideas matemáticas mediante el uso de lenguaje natural y matemático
- Calidad de las respuestas a las preguntas planteadas
- Argumentación de los procedimientos utilizados
- Justificación de las conclusiones
- Uso de diferentes representaciones

Análisis de soluciones incorrectas

PROPÓSITO DE EVALUACIÓN

Evaluar la capacidad para identificar errores, analizar inconsistencias y validar soluciones matemáticas.

CRITERIOS QUE PERMITE EVALUAR

- Análisis e interpretación de resultados
- Apropiación y manejo de conceptos
- Procedimientos y uso de herramientas
- Comunicación y argumentación

¿EN QUÉ CONSISTE LA ACTIVIDAD?

El docente entrega al estudiante una o varias soluciones que contienen errores. El estudiante identifica los errores presentes, explica por qué son incorrectos, corrige los procedimientos y propone una solución válida.

EVIDENCIAS OBSERVABLES

- Identificación de errores
- Explicación de inconsistencias
- Corrección y ajuste de procedimientos
- Análisis de validez de los resultados obtenidos
- Argumentación de las conclusiones
- Verificación de soluciones

Comparación de métodos de solución

PROPÓSITO DE EVALUACIÓN

Evaluar la selección y análisis de procedimientos o representaciones para resolver situaciones relacionadas con los contenidos del curso.

CRITERIOS QUE PERMITE EVALUAR

- Procedimientos y uso de herramientas
- Comunicación y argumentación
- Análisis e interpretación de resultados

¿EN QUÉ CONSISTE LA ACTIVIDAD?

El estudiante resuelve un mismo problema utilizando al menos dos métodos o representaciones diferentes. Compara las estrategias empleadas, analiza ventajas y limitaciones de cada una y justifica cuál es más eficiente o adecuada según el contexto del problema.

EVIDENCIAS OBSERVABLES

- Comparación de estrategias de solución
- Análisis de ventajas y limitaciones de métodos de solución
- Selección de procedimientos adecuados
- Justificación de métodos utilizados
- Relación entre representaciones, procedimientos y resultados

Exposiciones o videos explicativos sobre temáticas del curso, proyectos o solución de problemas

PROPÓSITO DE EVALUACIÓN

Evaluar la capacidad para comunicar y argumentar ideas matemáticas en la explicación de conceptos, problemas, procedimientos o resultados.

CRITERIOS QUE PERMITE EVALUAR

- Comunicación y argumentación
- Apropriación y manejo de conceptos
- Solución de problemas y aplicaciones
- Análisis e interpretación de resultados

¿EN QUÉ CONSISTE LA ACTIVIDAD?

El estudiante prepara y presenta una exposición oral o en video sobre un tema del curso, un proyecto desarrollado o la solución de un problema. Explica los conceptos involucrados, muestra los procedimientos, interpreta los resultados y responde preguntas de la audiencia.

EVIDENCIAS OBSERVABLES

- Explicación y uso adecuado de conceptos, teoremas y propiedades
- Uso adecuado de representaciones; argumentación de soluciones
- Interpretación de resultados en contextos determinados
- Relación entre conceptos y procedimientos
- Respuestas adecuadas a preguntas y discusión de resultados

Formulación de problemas o proyectos

PROPÓSITO DE EVALUACIÓN

Evaluar la capacidad para extender, modificar o construir nuevas situaciones o problemas relacionados con los contenidos del curso.

CRITERIOS QUE PERMITE EVALUAR

- Solución de problemas y aplicaciones
- Apropiación y manejo de conceptos
- Comunicación y argumentación

¿EN QUÉ CONSISTE LA ACTIVIDAD?

El estudiante construye nuevos problemas a partir de los contenidos del curso, modifica condiciones de problemas dados o diseña un proyecto que requiere aplicar los conceptos aprendidos. Formula situaciones coherentes, las resuelve y explica el proceso de construcción.

EVIDENCIAS OBSERVABLES

- Formulación coherente de nuevas preguntas o problemas
- Modificación de condiciones dadas en problemas o ejercicios
- Establecimiento de conexiones entre conceptos
- Generalización de resultados a otros problemas o contextos
- Propuesta de estrategias alternativas de solución

Actividades de interpretación

PROPÓSITO DE EVALUACIÓN

Evaluar la capacidad para analizar el significado, alcance y validez de resultados en contextos específicos.

CRITERIOS QUE PERMITE EVALUAR

- Análisis e interpretación de resultados
- Comunicación y argumentación
- Solución de problemas y aplicaciones

¿EN QUÉ CONSISTE LA ACTIVIDAD?

El docente presenta resultados, gráficas, tablas o soluciones obtenidas en contextos específicos. El estudiante interpreta esos resultados, analiza su alcance y limitaciones, valida si son correctos y explica sus implicaciones en el contexto dado.

EVIDENCIAS OBSERVABLES

- Interpretación de resultados en contextos determinados
- Análisis de alcances y limitaciones de los resultados obtenidos en la solución a problemas y ejercicios
- Coherencia entre las representaciones utilizadas y las conclusiones obtenidas
- Validación de resultados
- Explicación de implicaciones y condiciones de validez de procedimientos y soluciones

07 Aprendizajes esperados del curso

1

Aplica y valida principios y procedimientos matemáticos como la modelación, el razonamiento lógico, la representación, el análisis de funciones y estructuras, la abstracción, la generalización, y el uso de métodos numéricos y analíticos para diseñar soluciones integrales a problemas elementales en contextos cotidianos y académicos

RALC3 Comprende y aplica relaciones, operaciones y propiedades algebraicas entre conjuntos en contextos matemáticos formales.

DESCRIPTORES · 8

ICLC20 Formaliza conjuntos mediante extensión, comprensión y representación simbólica.

ICLC21 Describe relaciones de pertenencia, inclusión e igualdad entre conjuntos.

ICLC22 Aplica operaciones entre conjuntos: unión, intersección, diferencia y complemento.

ICLC23 Representa relaciones y operaciones entre conjuntos mediante diagramas de Venn.

ICLC24 Analiza propiedades algebraicas de las operaciones entre conjuntos.

ICLC25 Utiliza leyes distributivas, asociativas, conmutativas y de complemento en la solución de problemas del álgebra de conjuntos.

ICLC26 Aplica leyes de De Morgan en la transformación de expresiones que expresan relaciones entre conjuntos.

ICLC27 Resuelve problemas utilizando reglas y operaciones entre conjuntos.

08 Unidades temáticas

3

1 Álgebra de conjuntos

Introducción histórica, teoría intuitiva de conjuntos, teoría axiomática de conjuntos, el lenguaje de la Teoría de Conjuntos, Igualdad, inclusión y conjunto vacío y Operaciones, producto cartesiano, relaciones binarias, relación inversa, producto relativo y restricción, imagen bajo una relación y relación identidad, propiedades de ciertas relaciones, relaciones de equivalencia, relaciones de orden, funciones, composición, funciones inyectivas, sobre y biyectivas, función inversa

2 El axioma de elección

El axioma de elección, El lema de Zorn, Axioma de Constructibilidad

3 Construcción de los cardinales

Sucesor de un conjunto, el axioma de infinitud, el conjunto de los números naturales, el principio de la inducción matemática, propiedades de los números naturales. Conjunto parcial y totalmente ordenado, segmento inicial, elementos

09 Orientaciones pedagógicas

El Departamento de Matemáticas y Estadística concibe la enseñanza como un proceso orientado al desarrollo del pensamiento matemático y estadístico, mediante experiencias de aprendizaje que promuevan la comprensión conceptual, el razonamiento, la resolución de problemas, la modelación, la interpretación de información y la comunicación rigurosa de ideas. Desde esta perspectiva, el aprendizaje trasciende la adquisición de contenidos y procedimientos, favoreciendo el desarrollo de capacidades que permitan a los estudiantes enfrentar con fundamento situaciones propias de su formación académica, profesional y ciudadana.

PRINCIPIOS ORIENTADORES

El presente marco establece los principios que orientan el diseño, desarrollo y evaluación de los cursos ofrecidos por el Departamento de Matemáticas y Estadística. Su finalidad es fortalecer la coherencia curricular, promover una cultura de calidad académica y ofrecer referentes compartidos para la práctica docente, respetando la autonomía profesoral y la diversidad de estrategias metodológicas propias de la educación superior.

Estos principios se sustentan en referentes nacionales e internacionales sobre la enseñanza de las matemáticas y la estadística, el diseño curricular basado en resultados de aprendizaje y el aseguramiento de la calidad en educación superior (Biggs & Tang, 2011; GAISE College Report ASA Revision Committee, 2021; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2014; National Research Council, 2001; OECD, 2023).

1. **La enseñanza promueve el desarrollo de capacidades para comprender, razonar, representar, argumentar, modelar e interpretar situaciones desde perspectivas matemáticas y estadísticas. En consecuencia, los contenidos disciplinares constituyen un medio para desarrollar formas de pensamiento que permitan a los estudiantes comprender la realidad, enfrentar problemas complejos y transferir el conocimiento a diferentes contextos profesionales y sociales.**

En ese sentido, la enseñanza debe orientarse al desarrollo progresivo de conocimientos, habilidades y actitudes que permitan al estudiante comprender, modelar, analizar y resolver situaciones propias de su contexto académico y profesional. Los contenidos constituyen un medio para alcanzar los resultados de aprendizaje y no un fin en sí mismos.

2. **El diseño de los cursos parte de resultados de aprendizaje claramente definidos que orientan las experiencias de enseñanza, las actividades de aprendizaje y los procesos de evaluación. Esta articulación favorece la coherencia curricular, proporciona claridad sobre las expectativas formativas y garantiza que las evidencias de aprendizaje reflejen los desempeños esperados al finalizar el proceso educativo.**

En consecuencia, toda actividad de enseñanza, aprendizaje y evaluación debe responder explícitamente a los resultados de aprendizaje definidos para el curso. La planeación de clases, las actividades propuestas y los instrumentos de evaluación deben mantener una alineación constructiva entre resultados, estrategias didácticas y evidencias de aprendizaje.

3. **El Departamento promueve experiencias de aprendizaje que permitan a los estudiantes utilizar los conocimientos matemáticos y estadísticos para analizar, representar e interpretar situaciones provenientes de diferentes disciplinas y contextos. La resolución de problemas, la modelación matemática y el análisis de datos favorecen la integración de conceptos, el desarrollo del razonamiento y la construcción de explicaciones fundamentadas, fortaleciendo la capacidad para comprender fenómenos y apoyar la toma de decisiones.**

Por lo tanto, la resolución de problemas constituye el principal contexto para la construcción y aplicación del conocimiento matemático y estadístico. Los estudiantes deben enfrentarse a situaciones que demanden interpretar, representar, modelar, argumentar, validar soluciones y comunicar resultados, favoreciendo el desarrollo del pensamiento matemático.

4. **El aprendizaje adquiere significado cuando los estudiantes comprenden las ideas fundamentales de la disciplina, establecen relaciones entre diferentes representaciones, justifican sus procedimientos y comunican sus conclusiones con precisión y rigor.**

En consecuencia, la enseñanza debe promover la comprensión de conceptos, propiedades y relaciones matemáticas antes de enfatizar la aplicación mecánica de algoritmos o procedimientos. Se favorecerá el establecimiento de conexiones entre diferentes representaciones, ideas y contextos. En ese sentido, los contenidos deben relacionarse, cuando sea pertinente, con problemas propios de las disciplinas profesionales de los estudiantes, favoreciendo la transferencia del conocimiento matemático y estadístico hacia contextos reales, científicos, tecnológicos y sociales.

5. La práctica docente reconoce la diversidad de trayectorias de aprendizaje de los estudiantes y propicia ambientes académicos caracterizados por el respeto, la participación, la colaboración y el compromiso con el aprendizaje.

Por lo tanto, la evaluación debe concebirse como un proceso continuo de retroalimentación que permita identificar avances, dificultades y oportunidades de mejora. Se promoverá la utilización de estrategias diagnósticas, formativas y sumativas coherentes con los resultados de aprendizaje y los criterios de evaluación establecidos.

Asimismo, la incorporación de recursos tecnológicos debe fortalecer la comprensión conceptual, la experimentación, la visualización, la modelación, el análisis de datos y la resolución de problemas, evitando que las herramientas tecnológicas sustituyan el razonamiento matemático.

CONSIDERACIONES FINALES

Los principios establecidos en este documento constituyen un marco institucional para orientar el desarrollo de los cursos del Departamento de Matemáticas y Estadística. Su propósito no es definir metodologías únicas de enseñanza ni limitar la autonomía profesoral, sino ofrecer referentes compartidos que contribuyan a la calidad académica, la coherencia curricular y el logro de los resultados de aprendizaje.

10 Bibliografía

5

- Halmos, P. R. Teoría intuitiva de los conjuntos. Compañía Editorial Continental.
- Hrbacek, K., & Jech, T. Introduction to Set Theory. Marcel Dekker.
- Suppes, P. Teoría axiomática de conjuntos. Editorial Norma.
- Lipschutz, S. Teoría de conjuntos y temas afines. McGraw-Hill (Serie Schaum).
- Enderton, H. B. Elements of Set Theory. Academic Press.